Четырёхчленные рекуррентные соотношения для γ-форм*

А. И. Аптекарев[†], Д. Н. Туляков [‡]

1 Введение

Пусть $Q_n(x)$ — многочлен, задаваемый обобщенной формулой Родрига

$$Q_n(x) = \frac{(1-x)^{-1}e^x}{(n!)^2}\frac{d^n}{dx^n}x^n\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{2n+1}x^ne^{-x}. \tag{1}$$

Рассмотрим две математические константы — постоянную Эйлера γ

$$\gamma := -\int\limits_0^\infty \ln x\, e^{-x}dx\ ,$$

и значение интегральной экспоненты $e\mathrm{Ei}(1,1)$, где

$$\mathrm{Ei}(n,x) = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt\ .$$

Пусть f_n и g_n — последовательности $\mathbb{Z}$-форм относительно констант γ и $e\mathrm{Ei}(1,1)$, генерируемые полиномами Q_n по формулам

$$f_n := p_n - \gamma q_n := \int\limits_0^\infty Q_n(x)\ln x\, e^{-x}dx\ , \tag{2}$$

и

$$g_n := e\mathrm{Ei}(1,1)\, q_n - r_n := e\int\limits_1^\infty Q_n(x)\ln x\, e^{-x}dx\ . \tag{3}$$

Настоящая работа посвящена получению и доказательству следующего результата.

*Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой №1 ОМН РАН и грантом ИНТАС 03-51-6637

[†]частично поддержан исследовательским грантом РФФИ-05-01-00522

[‡]частично поддержан исследовательским грантом РФФИ-05-01-00697

Теорема 1 *Целочисленные коэффициенты* p_n, q_n, r_n, *форм* (2) *и* (3) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$(16n-15)q_{n+1} = (128n^3+40n^2-82n-45)q_n - \\ - n^2(256n^3-240n^2+64n-7)q_{n-1} + n^2(n-1)^2(16n+1)q_{n-2} \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\begin{array}{llll} p_0=0 & p_1=2 & p_2=31 & , \\ q_0=1 & q_1=3 & q_2=50 & , \\ r_0=0 & r_1=1 & r_2=24 & . \end{array}$$

2 Связь γ-форм с рекуррентными соотношениями для $Q_n(1)$

Известно (см. [1]), что многочлены $Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}$, $\deg Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)} = 4n$, определяемые формулой Родрига

$$Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x) = \frac{1}{n!}(1-x)^{-1}x^{-\alpha_2}e^x\frac{d^n}{dx^n}x^{n+\alpha_2-\alpha_1}\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{2n+1}x^{n+\alpha_1}e^{-x} \tag{5}$$

удовлетворяют системе соотношений ортогональности

$$\left\{\begin{array}{ll} \int\limits_0^1 Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)x^\nu w_1(x)dx = 0 & , \\ \int\limits_0^1 Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)x^\nu w_2(x)dx = 0 & , \\ \int\limits_1^\infty Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)x^\nu w_1(x)dx = 0 & , \\ \int\limits_1^\infty Q_n^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)x^\nu w_2(x)dx = 0 & , \end{array}\right. \quad , \ \nu = 0, \dots, n-1 \ , \tag{6}$$

где $w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x}$, $w_2(x) := x^{\alpha_2}(1-x)e^{-x}$.
Нетрудно видеть (вычитая соотношения ортогональности в (6) и деля результат на константу), что соотношения ортогональности (6) сохраняют силу и при

$$w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x} \ , \quad w_2(x) := \frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}(1-x)e^{-x} \ .$$

Тем самым, устремляя $\alpha_2\to\alpha_1$, а затем $\alpha_1\to 0$, мы получаем, что многочлены $Q_n := Q_n^{(0,0)}$ (см. (1), (5)) удовлетворяют соотношениям ортогональности (6) с весовыми функциями

$$w_1(x) := (1-x)e^{-x} \ , \ w_2(x) := (1-x)\ln x\, e^{-x} \ . \tag{7}$$

Рассмотрим следующие функции второго рода, связанные с системой ортогональности (6), (7)

$$R_n(z) = \int\limits_0^\infty \frac{Q_n(x)}{z-x}(1-x)\ln x\, e^{-x}dx,$$

$$S_n(z) = \int\limits_0^1 \frac{Q_n(x)}{z-x}(1-x)\ln x\, e^{-x}dx.$$

Также известно (например, см. [2]), что функции второго рода, порождённые $Q_n(x)$, удовлетворяют (вследствие соотношений ортогональности) тем же рекуррентным соотношениям, что и полиномы $Q_n(x)$, т.е. рекуррентным соотношениям теоремы $1'$ работы [3], и как следствие, рекуррентным соотношениям теорем 1 и 2 работы [4]. Таким образом, интересующие нас формы (2) и (3)

$$f_n = R_n(1)\ , \quad g_n = eS_n(1)$$

удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и $Q_n(1)$, например, восьмичленному рекуррентному соотношению следствия теоремы 2 работы [4].

3 Получение четырёхчленного рекуррентного соотношения для форм.

Полученные в [4] рекуррентные соотношения позволили вычислять формы (2) и (3) до n порядка нескольких тысяч, что в свою очередь дало богатый материал для экспериментального изучения рациональных приближений к постоянной Эйлера. В частности, исследуя общие множители последовательностей $(ap_n + bp_{n-1} + cp_{n-2})$ и $(aq_n + bq_{n-1} + cq_{n-2})$, был замечен следующий экспериментальный факт

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n & r_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} & r_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} & r_{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} (n-1)!^2(n-2)!^2(16n-1)\ , \quad n = 2, 3, \ldots, 5000, \tag{8}$$

что в свою очередь привело к гипотезе, что p_n, q_n, r_n являются базисом решений некоторого четырёхчленного рекуррентного соотношения с рациональными по n коэффициентами. То есть верны соотношения

$$\begin{cases} p_{n+1} = K_n^{(0)}p_n + K_n^{(1)}p_{n-1} + K_n^{(2)}p_{n-2} \\ q_{n+1} = K_n^{(0)}q_n + K_n^{(1)}q_{n-1} + K_n^{(2)}q_{n-2} \\ r_{n+1} = K_n^{(0)}r_n + K_n^{(1)}r_{n-1} + K_n^{(2)}r_{n-2} \end{cases},$$

причём коэффициент $K_n^{(2)}$ есть отношение последовательных определителей (8).

Экспериментальная проверка гипотезы и получение явного вида рациональных функций $K_n^{(0)}$, $K_n^{(1)}$ проводились численной процедурой восстановления рациональной функции по её переопределённому рациональному интерполянту.

4 Доказательство теоремы.

Наша цель — строго обосновать соотношение (4), опираясь на восьмичленное рекуррентное соотношение из работы [4] (следствие Теоремы 2). Для того, чтобы не возникало впечатления "везения" или "случайности" в этом обосновании, мы приведём общую процедуру проверки одного линейного рекуррентного соотношения при помощи другого.

Итак, мы находимся в следующей ситуации: есть некоторая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, есть коэффициенты $a_j(n)$ $(j=\overline{0..m_1})$ доказанного соотношения $\sum_{j=0}^{m_1} a_j(n)S_{n+j} = 0$, есть коэффициенты $b_j(n)$ $(j=\overline{0..m_2})$ экспериментального соотношения $\sum_{j=0}^{m_2} b_j(n)S_{n+j} \stackrel{?}{=} 0$, которое требуется проверить и доказать. Нужно узнать, до какого номера n надо проверять экспериментальное соотношение, чтобы быть уверенным в его истинности для всех $n\in\mathbb{N}$. Описанная ниже процедура годится для любых зависимостей коэффициентов a и b от n, для которых выполнено следующее свойство:

(*) Любое алгебраическое выражение (полином), составленное из подвыражений вида $a_j(n+i)$, $b_j(n+i)$, k, где $i, j, k \in \mathbb{Z}$, **либо** обращается в 0 для всех натуральных n, **либо** обращается в 0 на конечном множестве исключительных значений $n\in\mathbb{N}$.

При этом существует финитная для любого фиксированного выражения процедура проверки альтернативы (*) и нахождения верхней границы на элементы множества исключительных значений. Очевидно, полиномиальная зависимость a и b от n этим свойством обладает.

Будем считать, что $m_2 < m_1$, поскольку элементы S_{n+j} при $j \geqslant m_1$ можно выразить через предыдущие. Рассмотрим величины $\Sigma_n = \sum_{j=0}^{m_2} b_j(n)S_{n+j}$. Наша цель — найти рекуррентное соотношение для Σ_n.

$$M = \begin{pmatrix} a_0(n)\dots\dots\dots a_{m_1}(n) & & & \\ & a_0(n+1)\dots\dots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots \\ & & a_0(n+l_1) & \dots\dots\dots\dots & a_{m_1}(n+l_1) \\ b_0(n)\dots\dots b_{m_2}(n) & & & \\ \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & b_0(n+l_2) & \cdots & b_{m_2}(n+l_2) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Для этого сформируем матрицу M со структурой, показанной в формуле (9), выбрав l_1 и l_2 так, чтобы $l_1+m_1 = l_2+m_2$ и чтобы

$\operatorname{rank}(M) = l_1+l_2+1$, то есть был на единицу меньше числа строк матрицы M. Тогда $0 \leqslant l_1 \leqslant m_2$. Требуемое l_1 находится следующим образом.

Вначале построим матрицу M для $l_1 = m_2$; $l_2 = m_1$. Отметим все столбцы. В матрице, образованной отмеченными столбцами, число строк на 1 больше числа столбцов. Поэтому мы можем сформировать обнуляющий вектор-строку V для отмеченных столбцов: элемент v_i получается умножением $(-1)^i$ на определитель, полученный из выделенной подматрицы вычёркиванием i-й строки. Если последний элемент V не равен 0 (то есть не обращается в 0 при всех $n \in \mathbb{N}$), то нужные нам l_1, l_2, V найдены.

В противном случае можно вычеркнуть последнюю строку, и подматрица из отмеченных столбцов будет вырожденной. Но в последном столбце у неё только один ненулевой элемент $a_{m_1}(n+l_1)$. Значит, можно вычеркнуть последний столбец и последние строки в каждом блоке (что равносильно уменьшению l_1 и l_2 на 1), и всё равно подматрица из выделенных столбцов будет вырожденной. Значит, между отмеченными столбцами есть линейное соотношение, и один из них можно исключить — сделать непомеченым. Последние l_2 столбцов линейно независимы, поэтому исключаемый столбец можно выбрать среди остальных столбцов. Теперь мы снова находимся в ситуации, когда в матрице, образованной отмеченными столбцами, число строк на 1 больше числа столбцов. Поэтому мы повторяем процедуру формирования обнуляющей строки V для отмеченных столбцов. Поскольку неотмеченные столбцы линейно зависимы от отмеченных, то V является обнуляющей строкой и для них.

Итак, пусть найдены $l_1,\ l_2$ и построена обнуляющая строка V, которая имеет вид $[\varphi_0, \ldots, \varphi_{l_1}, f_0, \ldots, f_{l_2}]$. По построению $f_{l_2} \not\equiv 0$. Рассмотрим матричное произведение VMW, где вектор-столбец $W = [S_n, \ldots, S_{n+m_1+l_1}]^T$. Считая его двумя способами, получим тождество:

$$\sum_{i=0}^{l_2} f_i \Sigma_{n+i} = [\varphi_0, \ldots, \varphi_{l_1}, f_0, \ldots, f_{l_2}] \cdot [0, \ldots, 0, \Sigma_n, \ldots, \Sigma_{n+l_2}]^T =$$
$$= V \cdot MW = VM \cdot W = [0, \ldots, 0] \cdot W = 0$$

Поскольку $f_{l_2} \not\equiv 0$, то есть значение $n = \widetilde{n}$, начиная с которого $f_{l_2}(n) \neq 0$. Поэтому проверку $\Sigma_n \overset{?}{=} 0$ достаточно осуществить до номера $n = \widetilde{n}+l_2$.

Применим эту процедуру к рекуррентным соотношениям (4) и (16) из работы [4]. Хотя коэффициенты рекуррентного восьмичленного соотношения являются многочленами (по n) очень большой степени (порядка 80–90), тем не менее современные пакеты символьных вычислений (MAPLE) позволяют вычислять определители из (9) с такими входными данными. Для соотношения (4) и восьмичленного соотношения (16) из работы [4] оказалось, что ранг матрицы (9) для $l_1 = m_2 = 3$ и $l_2 = m_1 = 7$ равен $8 = (l_1+l_2+1)-3$, поэтому этап уменьшения $l_1,\ l_2$ будет пройден 3 раза. В итоге $l_1 = 0,\ l_2 = 4$, отмечать можно последние 5 столбцов, и вычисленная по ним аннулирующая строка V аннулирует и первые 3 столбца. Вычисленный таким образом многочлен $f_4(n)$ (последний элемент V)

имеет вид

$$f = f_4(n) = \begin{vmatrix} a_3(n) & a_4(n) & a_5(n) & a_6(n) & a_7(n) \\ b_3(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(n+1) & b_3(n+1) & 0 & 0 & 0 \\ b_1(n+2) & b_2(n+2) & b_3(n+2) & 0 & 0 \\ b_0(n+3) & b_1(n+3) & b_2(n+3) & b_3(n+3) & 0 \end{vmatrix}.$$

Оценку величины максимального по модулю корня этого полинома делаем через коэффициенты полинома по известной формуле:

$$|\widetilde{n}| < 1 + \max_{1\leqslant i\leqslant \deg(f)} \left| \frac{\mathrm{coeff}(f, \deg(f) - i)}{\mathrm{coeff}(f, \deg(f))} \right|^{1/i} .$$

Подставляя сюда явные значения коэффициентов рекуррентных соотношений (4) и (16) из работы [4], получаем

$$|\widetilde{n}| < 70.$$

Численная проверка совпадения решений рекуррентных соотношений (4) и (16) из [4] до $n = 70$ завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho and W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** - (10), (2003), 3887–3914.

[2] В. А. Калягин, *Аппроксимаций Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных операторов*, Матем. Сб., **185** - (6), (1994), 79–100.

[3] Д. В. Христофоров, *Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита-Паде одной системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа*, Современные проблемы математики, Вып. ??, (А.И.Аптекарев ред.), МИАН, М., 2006, ???–???

[4] А. И. Боголюбский, *Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных многочленов, задаваемых формулой Родрига,* Современные проблемы математики, Вып. ??, (А.И.Аптекарев ред.), МИАН, М., 2006, ???–???